

Gli spazi vettoriali

1 Definizioni e prime proprietà.

Siano $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali e V un insieme non vuoto in cui sono definite le seguenti operazioni:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V.$$

Diremo che $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali se valgono le seguenti:

- 1) $(V, +)$ è un gruppo commutativo, cioè
 - i) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$, per ogni $v_1, v_2, v_3 \in V$;
 - ii) esiste $e \in V$ tale che $v + e = e + v = v$, per ogni $v \in V$;
 - iii) per ogni $v \in V$, esiste $w \in V$, tale che $v + w = w + v = e$;
 - iv) per ogni $v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
- 2) $(a + b)v = av + bv$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $v \in V$.
- 3) $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in V$.
- 4) $a(bv) = (ab)v = (ba)v = b(av)$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $v \in V$.
- 5) $1_{\mathbb{R}} \cdot v = v$, per ogni $v \in V$.

Chiameremo **vettori** gli elementi di uno spazio vettoriale e **scalari** gli elementi del campo $\mathbb{R}$.

Esempio 1.1 *L'insieme delle matrici $M_{mn}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni di somma tra matrici e prodotto per uno scalare.*

Esempio 1.2 *L'insieme dei vettori geometrici in $\mathbb{R}^3$ (o in $\mathbb{R}^2$) è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare.*

Esempio 1.3 *$\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su se stesso.*

Esempio 1.4 *L'insieme dei polinomi di grado minore o uguale ad un fissato n ,*

$$\mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

a coefficienti reali, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni di somma tra polinomi e di prodotto di un polinomio per uno scalare.

Esempio 1.5 *Sia*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Definiamo le seguenti operazioni

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Allora $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali. Ogni vettore è una n -upla del tipo $(x_1, \dots, x_n)$.

Sia $W \subseteq V$, sottoinsieme dello spazio vettoriale V . Diremo che W è un sottospazio vettoriale di V , se è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni definite in V , sul medesimo campo dei reali. Da tale definizione deriva che, condizione necessaria e sufficiente affinché W sia sottospazio di V è che valgano le due seguenti :

$$w_1 + w_2 \in W$$

$$aw \in W$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$, $w, w_1, w_2 \in W$, e queste si possono compattare nell'unica condizione

$$aw_1 + bw_2 \in W$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $w_1, w_2 \in W$.

Esempio 1.6 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 su $\mathbb{R}$, $M_2(\mathbb{R})$.

Esempio 1.7 $W = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1.8 $\mathbb{R}$ è un sottospazio banale di se stesso.

Esempio 1.9 $W = \{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \mid a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}\}$, insieme dei polinomi di grado minore o uguale a m , con $m \leq n$, è sottospazio vettoriale di $V = \{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

2 Intersezione, unione e somma di sottospazi.

Siano U, W sottospazi dello spazio vettoriale V . Consideriamo l'intersezione di U e W

$$U \cap W = \{v \in V : v \in U \text{ e } v \in W\}$$

esso é ancora un sottospazio di V .

Esempio 2.1 Siano $U = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, 0, z), \quad x, z \in \mathbb{R}\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Allora un generico vettore che appartenga ad entrambi é dato dalle componenti $(x, 0, 0)$, quindi scriveremo

$$U \cap W = \{v \in V : v = (x, 0, 0), \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

Esempio 2.2 Siano $U = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, x, x), \quad x \in \mathbb{R}\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Allora l'unico vettore che appartenga ad entrambi é dato dalle componenti $(0, 0, 0)$, quindi scriveremo

$$U \cap W = \{(0, 0, 0)\}.$$

Al contrario definiamo l'unione di dei due sottospazi U e W

$$U \cup W = \{v \in V : v \in U \text{ oppure } v \in W\}.$$

non é detto che tale unione sia un sottospazio di V , e per dimostrarlo portiamo il seguente controesempio: consideriamo

$$U = \{(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(0, y), \quad y \in \mathbb{R}\}$$

sottospazi di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo il vettore $(1, 0) \in U$ ed il vettore $(0, 1) \in W$, ovviamente entrambi appartengono a $U \cup W$ ma

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W.$$

Definiamo ora il seguente sottoinsieme dello spazio vettoriale V :

$$U + W = \{v \in V : v = u + w, \quad u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

Esso é un sottospazio di V , detto somma di U e W , piú precisamente é il piú piccolo sottospazio di V contenente $U \cup W$.

Diremo che $U + W$ é somma diretta se $U \cap W = \{0\}$, il solo vettore nullo.

Esempio 2.3 Siano $U = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, 0, z), \quad x, z \in \mathbb{R}\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$U + W = \{(x, y, z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

inoltre $U \cap W = \{(x, 0, 0)\}$, quindi la somma non é diretta.

Esempio 2.4 Siano $U = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(z, z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$U + W = \{(x + z, y + z, z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

inoltre $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$, quindi la somma é diretta.

Esempio 2.5 Siano $U = \{(x, 0, z), \quad x, z \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(y, 0, y), \quad y \in \mathbb{R}\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$U + W = \{(x + y, 0, y + z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

inoltre $U \cap W = \{(x, 0, x)\}$, quindi la somma non é diretta.

Proposizione 2.1 Siano U e W sottospazi vettoriali dello spazio V . La loro somma é diretta se e solo se ogni vettore di essa si può esprimere in modo unico come somma di un vettore di U e di uno di W .

Ricordiamo che una combinazione lineare di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V é una scrittura del tipo

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

per qualsiasi $a_1, \dots, a_n$ scalari in $\mathbb{R}$.

Sia $S \subseteq V$, un sottoinsieme dello spazio V . Definiamo $\text{Span}(S) = \langle S \rangle$, e lo chiamiamo sottospazio generato da S , il sottospazio di V composto da tutte le possibili combinazioni lineari di vettori di S e scalari in $\mathbb{R}$.

Esempio 2.6 Sia $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$. Allora $\text{Span}(S) = \langle S \rangle = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \mathbb{R}\}$.

Definizione. Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori in V . Diremo che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, non tutti nulli tali che $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$.

Al contrario sono detti linearmente indipendenti se $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ implica che $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Esempio 2.7 $v_1 = (-1, 2, 3)$, $v_2 = (0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

Esempio 2.8 $v_1 = (1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 2, -1, 0)$, $v_4 = (-1, 1, 0, -1)$, $v_5 = (1, 1, 0, 1)$ vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti.

Esempio 2.9 $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, a)$, $v_3 = (1, a, -1)$ vettori di $\mathbb{R}^3$, con a parametro reale, sono indipendenti per $a \neq 1$ e sono dipendenti per $a = 1$.

3 Basi e dimensione di uno spazio vettoriale.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un insieme B di vettori è detta base di V se:

- 1) i vettori di B sono linearmente indipendenti;
- 2) $\text{Span}(B) = V$.

Esempio 3.1 Se $V = \mathbb{R}$, allora per ogni $a \in \mathbb{R}$, $B = \{a\}$.

Esempio 3.2 Sia $V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$. Allora una base per V è data da

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Esempio 3.3 Sia $V = \mathbb{R}^3$, allora una base è data da

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Esempio 3.4 Sia

$$V = \mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

allora una base è data da

$$B = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$$

Teorema 3.1 Sia V uno spazio vettoriale e $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una sua base. Siano $v_1, v_2, \dots, v_r$ r vettori linearmente indipendenti di V , con $r \leq n$. Allora esistono $n - r$ vettori $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-r}}$ di B tali che l'insieme $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_r, e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-r}}\}$ costituisca una base per V .

Teorema 3.2 *Due distinte basi di uno spazio vettoriale contengono lo stesso numero di elementi.*

Definiamo **dimensione di uno spazio vettoriale** V , e la indichiamo con $\dim(V)$, il numero di elementi di una qualsiasi base di V .

Esempio 3.5

Sia

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}.$$

Il generico vettore di W é $(x_1, x_2, -x_2, x_1)$, quindi

$$\dim(W) = 2 \quad \text{e} \quad W = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0) \rangle.$$

Esempio 3.6

Sia

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

Il generico vettore di W é $(x_1, x_2, x_3, x_2 - x_3)$, quindi

$$\dim(W) = 3 \quad \text{e} \quad W = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1) \rangle.$$

Supponiamo ora che lo spazio vettoriale V abbia dimensione n , indichiamo con $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una sua base. Diciamo componenti di un vettore $v \in V$ rispetto alla base B , gli scalari $a_1, \dots, a_n$ tali che $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$.

Esempio 3.7 *Sia $V = \mathbb{R}^2$ e consideriamo due distinte basi di V :*

$$B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$B_2 = \{(1, -2), (4, 1)\}.$$

Sia $v \in V$ un vettore che abbia componenti $(0, -1)$ rispetto alla base B_1 , cioè $v = (0)(1, 0) + (-1)(0, 1) = (0, -1)$. Calcoliamo le sue componenti (a_1, a_2) rispetto alla base B_2 :

$$v = a_1(1, -2) + a_2(4, 1)$$

cioé

$$(0, -1) = (a_1 + 4a_2, -2a_1 + a_2)$$

da cui $a_1 = \frac{4}{9}$ e $a_2 = -\frac{1}{9}$.

4 Formula di Grassmann.

Siano A, B sottospazi vettoriali dello spazio V . Vogliamo considerare ora la relazione che intercorre tra le dimensioni di A , B , $A + B$ e $A \cap B$. Vale la seguente (formula di Grassmann):

Proposizione 4.1 $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$.

Si noti che nel caso $A + B$ sia una somma diretta, la formula di Grassmann si riduce al piú semplice caso $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B)$, poiché $A \cap B = \{0\}$, quindi $\dim(A \cap B) = 0$ (in tale caso si indica $A + B = A \oplus B$).

Proposizione 4.2 *Siano A e B sottospazi vettoriali dello spazio V , e siano C_A e C_B rispettivamente una base di A ed una di B . Allora l'unione dei vettori delle due basi, cioè $C_A \cup C_B$, costituisce un insieme di generatori per il sottospazio $A + B$. Inoltre i vettori di $C_A \cup C_B$ che sono tra loro linearmente indipendenti costituiscono una base per $A + B$.*

Esempio 4.1 *Siano $V = \mathbb{R}^4$,*

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad y = 0, 2z - t = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - t = 0, y + z = 0\}$$

e calcoliamo $\dim(A + B)$.

Il primo passo é quello di calcolare basi e dimensioni di A e B . Il generico vettore di A si esprime $(x, 0, z, 2z)$, al variare di $x, z \in \mathbb{R}$. Allora $\dim(A) = 2$ ed una sua base é la seguente

$$(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 2).$$

Il generico vettore di B si esprime $(x, y, -y, x)$, al variare di $x, y \in \mathbb{R}$. Allora $\dim(B) = 2$ ed una sua base é

$$(1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0).$$

Quindi se $v \in A \cap B$, esso deve essere esprimibile contemporaneamente in due modi, cioè

$$v = (a, 0, b, 2b) = (c, d, -d, c) \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Uguagliando le due quaterne si ottiene

$$a = b = c = d = 0$$

che significa $A \cap B = \{0\}$ e $\dim(A \cap B) = 0$, da cui

$$\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

Concludiamo allora che $A + B = \mathbb{R}^4$, come somma diretta.

Esempio 4.2 Siano $V = \mathbb{R}^3$,

$$A = \{(a+b, b, a), \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{(x, y, z), \quad x - y = 0\}.$$

Si ha che $\dim(A) = 2$ ed una sua base é data da

$$(1, 0, 1), (1, 1, 0).$$

Inoltre il generico vettore di B si esprime (x, x, z) , quindi $\dim(B) = 2$ ed una sua base é

$$(1, 1, 0), (0, 0, 1).$$

Quindi se $v \in A \cap B$, esso deve essere esprimibile contemporaneamente in due modi, cioè

$$v = (a+b, b, a) = (c, c, d) \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Uguagliando le due terne si ottiene

$$a = d = 0 \quad e \quad b = c \quad \text{da cui} \quad v = (b, b, 0).$$

Ciò vuol dire che $\dim(A \cap B) = 1$ ed una sua base é data dal vettore $(1, 1, 0)$. Applicando la formula di Grassmann otteniamo:

$$\dim(A + B) = 2 + 2 - 1 = 3$$

quindi $A + B = \mathbb{R}^3$ ma non come somma diretta.

Esempio 4.3 Siano $U = \langle (0, 1, 1), (2, 0, 1) \rangle$ e $W = \langle (1, 1, 2) \rangle$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Determiniamo $\dim(U + W)$.

Il generico vettore $v \in U \cap W$ si deve esprimere nei due seguenti modi

$$v = a(0, 1, 1) + b(2, 0, 1) = (2b, a, a+b) \in U$$

$$v = c(1, 1, 2) = (c, c, 2c) \in W.$$

Uguagliando le due terne otteniamo $a = b = c = 0$, cioè $U \cap W = \{0\}$, quindi in base alla formula di Grassmann $\dim(U + W) = 2 + 1 - 0 = 3$, e $U + W = \mathbb{R}^3$ come somma diretta.

Esempio 4.4 Siano

$$A = \langle (2, 0, 0, 1), (0, 0, -2, 0), (0, 0, 1, -1) \rangle$$

$$B = \langle (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle$$

sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Un generico vettore $v \in A \cap B$ si esprime nei due seguenti modi

$$v = a(2, 0, 0, 1) + b(0, 0, -2, 0) + c(0, 0, 1, -1) = (2a, 0, -2b + c, a - c) \in A$$

$$v = d(0, 1, 0, 0) + e(1, 1, 0, 0) = (e, d + e, 0, 0) \in B.$$

Uguagliando le due quaterne si ottiene

$$a = 2b = c = -\frac{d}{2} = \frac{e}{2}$$

quindi $v = (e, 0, 0, 0)$, al variare di $e \in \mathbb{R}$. Per cui $\dim(A \cap B) = 1$ e $\dim(A + B) = 3 + 2 - 1 = 4$, cioè $A + B = \mathbb{R}^4$, ma non come somma diretta.

Esempio 4.5 Siano

$$A = \langle (2, -1, 0, 1), (1, 3, 1, -1), (0, 1, -1, -1) \rangle$$

$$B = \langle (2, 0, 1, 0), (1, 2, 2, 0) \rangle$$

sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Determiniamo $\dim(A + B)$.

Un generico vettore $v \in A \cap B$ si esprime nei due seguenti modi

$$v = a(2, -1, 0, 1) + b(1, 3, 1, -1) + c(0, 1, -1, -1) = (2a + b, -a + 3b + c, b - c, a - b - c) \in A$$

$$v = d(2, 0, 1, 0) + e(1, 2, 2, 0) = (2d + e, 2e, d + 2e, 0) \in B.$$

Uguagliando le due quaterne si ottiene

$$a = d = 0 \quad b = -c = e$$

quindi $v = (e, 2e, 2e, 0)$, al variare di $e \in \mathbb{R}$. Per cui $\dim(A \cap B) = 1$ e $\dim(A + B) = 3 + 2 - 1 = 4$, cioè $A + B = \mathbb{R}^4$, ma non come somma diretta.

5 Cambiamento di base in uno spazio vettoriale.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{R}$ e siano $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ due distinte basi di V . Per ogni vettore $v \in V$ avremo:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$$v = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n \quad x'_1, \dots, x'_n \in \mathbb{R}.$$

Indichiamo allora $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ il vettore contenente le componenti di v rispetto alla base B e $X' = [x'_1, \dots, x'_n]^T$ quello contenente le componenti di v rispetto alla base B' .

In particolare anche i vettori $e_1, \dots, e_n$ possono esprimersi come combinazione dei vettori della base B' :

$$\begin{cases} e_1 = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{n1}e'_n \\ e_2 = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{n2}e'_n \\ \dots\dots\dots \\ e_n = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{nn}e'_n \end{cases}.$$

Da queste otteniamo:

$$\begin{aligned} v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n &= x_1 (a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{n1}e'_n) + x_2 (a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{n2}e'_n) + \\ &+ \dots\dots\dots + x_n (a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{nn}e'_n) = \\ &e'_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + e'_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \\ &+ \dots\dots\dots + e'_n (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) \end{aligned}$$

che deve essere uguale a $v = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n$, cioè

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}.$$

Indichiamo con A la matrice dei coefficienti di questo sistema lineare, $A = [a_{ij}]$, quindi possiamo riscrivere il sistema nel seguente modo:

$$X' = A \cdot X$$

che costituiscono le formule di passaggio dalle componenti di un vettore in base B a quelle del medesimo vettore in base B' .

La matrice A è detta matrice del cambiamento di base ed è costruita come segue:

- nella prima colonna vi sono le componenti del vettore e_1 rispetto alla base B' ;
- nella seconda colonna vi sono le componenti del vettore e_2 rispetto alla base B' ;
- In generale, nella colonna j vi sono le componenti del vettore e_j della base B , calcolate rispetto alla base B' .

Poiché gli n vettori di una base sono sempre linearmente indipendenti, il sistema sopra citato ha rango massimo, cioè n , quindi la matrice A è invertibile, da cui otteniamo le formule inverse per il cambiamento di base:

$$X = A^{-1} \cdot X'$$

che costituiscono le formule di passaggio dalle componenti di un vettore in base B' a quelle del medesimo vettore in base B .

La matrice A^{-1} è costruita come segue:

- nella prima colonna vi sono le componenti del vettore e'_1 rispetto alla base B ;
- nella seconda colonna vi sono le componenti del vettore e'_2 rispetto alla base B ;
- In generale, nella colonna j vi sono le componenti del vettore e'_j della base B' , calcolate rispetto alla base B .

Esempio 5.1

Siano $V = \mathbb{R}^2$ e $B = \{e_1 = (1, 1), e_2 = (0, 1)\}$, $B' = \{e'_1 = (1, 0), e'_2 = (2, 1)\}$ due basi di V . Determiniamo le formule di cambiamento di base in entrambi i versi.

Calcoliamo le componenti dei vettori della prima base rispetto alla seconda.

Le componenti di $e_1 = (1, 1)$ rispetto a B' sono $(e_1)_{B'} = (-1, 1)$ infatti

$$(1, 1) = (-1)(1, 0) + (1)(2, 1)$$

analogamente le componenti di $e_2 = (0, 1)$ rispetto a B' sono $(e_2)_{B'} = (-2, 1)$.

Per cui, la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ è quella che determina il passaggio dalla base B a quella B' , cioè

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e le formule di passaggio sono

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Le formule inverse sono date da

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + 2x'_2 \\ x_2 = -x'_1 - x'_2 \end{cases}$$

in cui la matrice di passaggio é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Per esempio consideriamo il vettore $v \in V$ che abbia componenti $X = (x_1, x_2) = (2, -3)$ rispetto alla base B . Determiniamo le sue componenti $X' = (x'_1, x'_2)$ rispetto alla base B' :

$$\begin{cases} x'_1 = -2 + 6 = 4 \\ x'_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}.$$

Esempio 5.2

Siano $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 0, 1)\}$ e $B' = \{(0, 1, 1), (2, -1, 0), (1, 0, 2)\}$ due basi di V . Determiniamo le formule di cambiamento di base.

Calcoliamo le componenti dei vettori della prima base B rispetto alla seconda B' :

$$(1, 1, 0) \rightarrow (2, 1, -1)_{B'}$$

$$(1, 0, 1) \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)_{B'}$$

$$(2, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0)_{B'}$$

per cui

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 \\ x'_3 = -x_1 + \frac{1}{3}x_2 \end{cases}.$$

Esempio 5.3

Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ due basi di V tali che

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_2 \end{cases}.$$

In tale caso le formule di passaggio dalla base B' alla base B sono

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

e calcolando l'inversa della matrice che compare nel sistema precedente:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Esempio 5.4

Siano $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 0, 1)\}$ e $B' = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 2)\}$ due basi di V . Sia $v \in V$ un vettore di componenti $(1, 1, 2)$ rispetto alla base B . Indichiamo (a, b, c) le componenti di v rispetto alla base B' . Per determinare (a, b, c) applichiamo ora esattamente la definizione di componente:

$$(1)(1, 1, 0) + (1)(1, 0, 1) + (2)(2, 0, 1) = a(1, 1, 1) + b(0, 0, 1) + c(1, 0, 2)$$

cioé

$$(6, 1, 3) = (a + c, a, a + b + 2c)$$

da cui $a = 1$, $b = -8$, $c = 5$.

6 Esercizi.

Esercizio 6.1 Siano $U = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Determinare i sottospazi $U \cap V$, $U \cap W$, $V \cap W$.

Esercizio 6.2 Siano $U = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Determinare i sottospazi $U + V$, $U + W$, $V + W$.

Esercizio 6.3 Siano $v_1 = (-1, 2, 3)$, $v_2 = (0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Determinare la dimensione del sottospazio generato da v_1, v_2, v_3 .

Esercizio 6.4 Ripetere l'esercizio precedente in $\mathbb{R}^4$ con i vettori $v_1 = (1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 2, -1, 0)$, $v_4 = (-1, 1, 0, -1)$, $v_5 = (1, 1, 0, 1)$.

Esercizio 6.5 Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, \alpha)$, $(1, \alpha, -1)$.

Esercizio 6.6 Siano $v_1 = (1, 2, 0, 0)$, $v_2 = (3, 1, 0, 1)$ vettori indipendenti in $\mathbb{R}^4$. Determinare due vettori che uniti ai precedenti li completino ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 6.7 Siano $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $B_2 = \{(1, -2), (4, 1)\}$ due basi di $\mathbb{R}^2$ e v un vettore di componenti $(0, -1)$ rispetto a B_1 . Determinare le componenti di v rispetto alla base B_2 .

Esercizio 6.8 Siano $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = 0, 2z - t = 0\}$ e $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - t = 0, y + z = 0\}$. Determinare una base per $U \cap V$ ed una per $U + V$.

Esercizio 6.9 Siano $U = \{(h + k, k, h); h, k \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(x, y, z); x - y = 0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Determinare una base per $U \cap V$ ed una per $U + V$.

Esercizio 6.10 Siano $B_1 = \{(1, 1), (0, 1)\}$ e $B_2 = \{(1, 0), (2, 1)\}$ due basi di $\mathbb{R}^2$ e v un vettore di componenti $(1, 1)$ rispetto a B_1 . Determinare le componenti di v rispetto alla base B_2 .

Esercizio 6.11 Siano

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 0, 1)\} \quad e \quad B_2 = \{(0, 1, 1), (2, -1, 0), (1, 0, 0)\}$$

due basi di $\mathbb{R}^3$ e v un vettore di componenti $(1, 2, 3)$ rispetto a B_1 . Determinare le componenti di v rispetto alla base B_2 .

Esercizio 6.12 Siano $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $B_2 = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ due basi di $\mathbb{R}^3$ e v un vettore di componenti $(1, 2, 3)$ rispetto a B_1 . Determinare le componenti di v rispetto alla base B_2 sapendo che valgono le seguenti relazioni tra i vettori delle due basi:

$$e'_1 = e_1 + 3e_2 + 2e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_3, \quad e'_3 = e_2.$$

Esercizio 6.13 Siano

$$B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad e \quad B_2 = \{(1, 4, 0), (1, 5, 0), (0, 0, -1)\}$$

due basi di $\mathbb{R}^3$ e v un vettore di componenti $(-1, 0, 5)$ rispetto a B_1 . Determinare le componenti di v rispetto alla base B_2 .

Esercizio 6.14 *Determinare la dimensione e la base del sottospazio: $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x - t = 0, y + 3z = 0\}$.*

Esercizio 6.15 *Determinare la dimensione e la base del sottospazio: $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x - t + 2z = 0\}$.*

Esercizio 6.16 *Determinare la dimensione e la base del sottospazio: $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y = 0, y + 3z + t = 0\}$.*

Esercizio 6.17 *Siano $U = \langle \{(0, 1, 1), (2, 0, 1)\} \rangle$ e $V = \langle \{(1, 1, 2)\} \rangle$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Determinare la dimensione di $U + V$.*

Esercizio 6.18 *Siano $U = \langle \{(2, 0, 0, 1), (0, 0, -2, 0), (0, 0, 1, -1)\} \rangle$ e $V = \langle \{(0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0)\} \rangle$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Determinare la dimensione di $U + V$.*

Esercizio 6.19 *Determinare la dimensione della somma dei sottospazi*

$$A = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$B = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$